Diferencijalne jednačine

Osnovni pojmovi

Jednačinu oblika $F(x,y,y')=0$ nazivamo diferencijalnom jednačinom prvog reda. Npr. diferencijalne jednačine prvog reda su:

a) $x^5-yy'+xy'-7=0$ (u ovom slučaju $F(x,y,y')=x^5-yy'+xy'-7$)

b) $y-yxy'=0$, (u ovom slučaju $F(x,y,y')=y-yxy'$)

c) $y'=7$

d) $xy'+1=0$

Jednačinu oblika $F(x,y,y',y'')=0$ nazivamo diferencijalnom jednačinom drugog reda. Npr. $y''-xy=4x^2$

$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ diferencijalna jednačina n-tog reda

Npr. a) $y^{IV}-3y''+3=x^2$ diferencijalna jednačina 4-og reda

b) $x^8-y^{(9)}+y''=1$ dif. jedn. devetog reda

1. Provjeriti da li su navedene f-je rješenja datih diferencijalnih jednačina.

a) diferencijalna jednačina $xy'=2y$, f-ja $y=5x^2$

b) diferencijalna jednačina $y''+y=0$, f-ja $y=\sin x$

c) $y''=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{x}$

d) $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$

Rj. a) $xy'=2y$, $y=5x^2$

$y'=10x$

$x\cdot y'=x\cdot 10x=10x^2$ ... (1)

$2y=10x^2$ ... (2)

(1) i (2) $\Rightarrow$ $x\cdot y'=2y$ F-ja $y=5x^2$ jeste rješenje diferencijalne jednačine $xy'=2y$

b) $y''+y=0$, $y=\sin x$ $\quad y''+y=-\sin x+\sin x=0$

$y'=\cos x$ $\quad y''+y=0$

$y''=-\sin x$

F-ja $y=\sin x$ jest rješenje dif. jedn. $y''+y=0$.

c) $y''=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ $\quad y''=x^2+y^2$ $\quad (y^2=(x^{-1})^2=x^{-2})$

$y'=(-1)x^{-2}$ $\quad 2x^{-3}=x^2+x^{-2}$ $/\cdot x^3$ $(x\neq 0)$

$y''=2x^{-3}$ $\quad 2=x^5+x$

F-ja $y=\frac{1}{x}$ nije rješenje diferencijalne jednačine $y''=x^2+y^2$.

d) URADITI ZA VJEŽBU Rj. jest

2. Odrediti diferencijalne jednačine prvog reda čija su rješenja: (C, C_1, C_2 su konstante)

a) $y=Cx$ $\quad$ b) $y^2=2Cx$ $\quad$ c) $y=C_1(x-C_2)^2$

Rj. a) $y=Cx$ $/'$ $\quad y=y'x$

$y'=C$ $\quad y-y'x=0$ je difer. jedn. prvog reda čije je rješenje $y=Cx$.

b) $y^2=2Cx$ $/'$ $\quad y^2=2yy'x$ $/:y$

$2yy'=2C$ $\quad y=2y'x$

$C=yy'$ $\quad y-2y'x=0$ je difer. jedn. prvog reda čije je rješenje $y^2=2Cx$.

c) URADITI ZA VJEŽBU

rješenje $2yy''=y'^2$ je difer. jedn. prvog reda čije je rješenje $y=C_1(x-C_2)^2$.

Proveriti da li je data f-ja rješenje date diferencijalne jednačine

a) $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$

b) $\ln x \ln y = c$, $y\ln y\,dx + x\ln x\,dy = 0$

c) $s=-t-\frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{d^2s}{dt^2}+tg\,t\,\frac{ds}{dt}=\sin 2t$.

Rj:

a) $y=\sqrt{x}=(x)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y\cdot y'=\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$2yy'=1$$

F-ja $y=\sqrt{x}$ je rješenje diferencijalne jednačine $2yy'=1$.

b) $\ln x \ln y = c \quad /d$

$$\frac{\partial(\ln x\ln y)}{\partial x}dx+\frac{\partial(\ln x\ln y)}{\partial y}dy=0$$

$$\ln y\cdot\frac{1}{x}dx+\ln x\cdot\frac{1}{y}dy=0$$

$$\ln x\,\frac{1}{y}dy=-\ln y\cdot\frac{1}{x}dx \quad /\cdot\frac{y}{\ln x}$$

$$dy=-\frac{y\ln y}{x\ln x}dx$$

Uvrstimo dobijeni izraz za dy u jednačinu $y\ln y\,dx+x\ln x\,dy=0$

$$y \ln y \, dx + x \ln x \left(-\frac{y \ln y}{x \ln x} dx \right) = 0$$

$$0 = 0$$

Prema tome f-ja $\ln x \ln y = c$ je rješenje diferencijalne jednačine $y \ln y \, dx + x \ln x \, dy = 0$.

c) $s = -t - \frac{1}{2} \sin 2t$

$$\frac{ds}{dt} = -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2t = -1 - \cos 2t$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 2 \sin 2t$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + tg\, t \frac{ds}{dt} = \sin 2t$$

$$2 \sin 2t + tg\, t (-1 - \cos 2t) = \sin 2t$$

$$\sin 2t + tg\, t (\underline{-\sin^2 t} - \cos^2 t - \cos^2 t \underline{+ \sin^2 t}) = 0$$

$$\sin 2t - 2\cos^2 t \, tg\, t = 0$$

$$\sin 2t - 2 \cos^2 t \frac{\sin t}{\cos t} = 0$$

$$\sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0$$

$$0 = 0$$

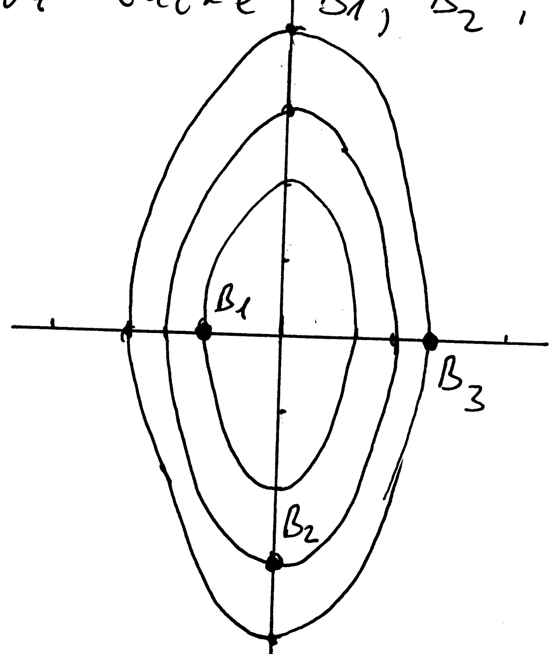
F-ja $s = -t - \frac{1}{2} \sin 2t$ je rješenje diferencijalne jednačine $\frac{d^2 s}{dt^2} + tg\, t \frac{ds}{dt} = \sin 2t$.

(#) Ako znamo opšte rješenje $4x^2+y^2=C^2$ neke diferencijalne jednačine prvog reda, odrediti i grafički prikazati integralne krive (parcijalni integrali) koje prolaze kroz tačke $B_1(-1;0)$, $B_2(0;-3)$ i $B_3(2;0)$.

Rj: Opšte rješenje $F(x,y,C)=0$ diferencijalne jednačine prvog reda $f(x,y,y')=0$ geometrijski definišu familiju krivih koje zavise samo od parametra C.
Zamjenjujući u opšte rješenje koordinate tačke P, odredit ćemo vrijednost C, u kojoj opšte rješenje integralne krive, prolazi kroz tačku P.

Za tačku B_1: $4=C^2$; $4x^2+y^2=4$.
Za tačku B_2: $9=C^2$; $4x^2+y^2=9$.
Za tačku B_3: $16=C^2$; $4x^2+y^2=16$.

Za dobijene jednakosti integralne krive prolaze kroz tačke B_1, B_2 i B_3. Nacrtajmo ove krive.



Date krive su koncentrične elipse čiji je centar u koordinatnom početku

Zadaci za vježbu

Provjeriti da li su date f-je rješenja datih jednačina:

1. $y = Ce^{-2x}$; $\quad y' + 2y = 0$.
2. $y = C_1 x + C_2 x^2$; $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.
3. $x^2 + 2xy = C$; $\quad (x+y)\,dx + x\,dy = 0$.
4. $s = t^2 \ln t + C_1 t^2 + C_2 t + C_3$; $\quad t\dfrac{d^3 s}{dt^3} = 2$.
5. * $y - x + C_1 \ln y = C_2$; $\quad yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

Diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalne jednačine prvog reda sa:

a) diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim

$$y' = f(x)\, g(y)$$

npr. $y' = -x \cdot \frac{1}{y}$, $y' = -x \frac{1}{y} e^{y}$,

$$\frac{tg\, x}{\cos^2 x}\, dx + \frac{\sin^2}{ctg\, y}\, dy = 0 , \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

b) homogene diferencijalne jednačine

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$

$y' = u'x + u$

npr. $y' = \dfrac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$, $y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

c) diferencijalne jednačine koje se svode na homogene

$y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, ako je $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ uvodimo smjenu $a_1 x + b_1 y = u$ i dobijemo diferenc. jedn. sa razdvojenim promjenjivim

ako je $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ uvodimo smjenu $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ gdje α i β dobijemo iz sistema

$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0$$
$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0$$

npr. $y' = \dfrac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}$

$$(x + y - 3)\, dy = -(2x - 4y + 6)\, dx$$

d) linearne diferencijalne jednačine

$y' + p(x)y = g(x)$, uvodimo smjenu $y = u \cdot v$

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

npr. $y' + y = -x$, $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

e) Bernulijeva diferencijalna jednačina

$y' + p(x)y = g(x)y^n$, $n \in R$, $n \neq 0$ i $n \neq 1$.

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + u \cdot v'$

npr. $y' + y = xy^3$, $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$,

$y' - y\,tg\,x + 2\sin x - 1 = 0$

f) Lagranžova diferencijalna jednačina

$y = x f(y') + g(y')$, uvodimo smjene $y' = p$, $x = uv$

$dy = p\,dx$

npr. $y = x \cdot 2y' - y'^2$, $y = x \cdot (-y') + 4\sqrt{y'}$,

$y = xy' - 2 - y'$

g) Klerova diferencijalna jednačina

$y = xy' + f(y')$, rješavamo ih na isti način kao što rješavamo Lagranžovu diferenc. jedn.

npr. $y = xy' + \sin y'$, $y = xy' + \frac{y'^2}{2}$

1. Odrediti tip diferencijalne jednačine:

a) $yy' + xe^y = 0$

Rj. $yy' = -xe^y$

$y' = -x\frac{1}{y}e^y$ diferencijalna jednačina sa razdvojenim promenj.

b) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$

Rj. $y = xy' + 4\sqrt{y'}$ Klerova difer. jedn.

c) $y' - y\,tg\,x + 2\sin x - 1 = 0$

Rj. $y' - tg\,x \cdot y = 1 - 2\sin x$ linearna difer. jedn.

d) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

Rj. $xy' = y + (x+y)\ln(1+\frac{y}{x})$ $/:x$

$y' = \frac{y}{x} + (1+\frac{y}{x})\ln(1+\frac{y}{x})$ homogena difer. jednačina

e) $xy' = y - xy\sin x$

Rj. $xy' = y(1 - x\sin x)$

$y' = y \cdot \frac{1 - x\sin x}{x}$ difer. jedn. sa razdvojenim promenjivim

f) $(x^2+1)y' - xy^2 = xy(x^2y - 1)$

$y' + \frac{x}{x^2+1}y = xy^2$

Rj. $(x^2+1)y' - xy^2 = xy \cdot x^2y - xy$

$(x^2+1)y' + xy = x^2 \cdot xy^2 + xy^2$

$(x^2+1)y' + xy = xy^2(x^2+1)$ $/:(x^2+1)$

Bernulijeva diferenc. jedn.

Početni uslovi

Rješenje oblika $\varphi(x, y, c) = 0$ diferencijalne jednačine $y' = f(x, y)$ zovemo opšte rješenje diferencijalne jednačine. Ako u opštem rješenju konstanta c dobije neku određenu vrijednost, dobijamo partikularno rješenje diferencijalne jednačine.

○ Naći ono rješenje diferencijalne jednačine $y' = y$ koje zadovoljava uvjete $y = 1$ za $x = 0$.

Rj. $y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y \quad / \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y = e^{x + c_1}$$

$$y = C e^x \quad \text{opšte rješenje}$$

$$y(0) = 1$$

$$c e^0 = 1$$

$$c = 1$$

$$y = e^x \quad \text{partikularno rješenje}$$

○ Naći opšte rješenje diferencijalne jednačine $y' = x^2 - 2$.

Rj. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2 \quad / \cdot dx \qquad dy = (x^2 - 2)\,dx \quad / \int$

$$\int dy = \int (x^2 - 2)\,dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x + C \quad \text{opšte rješenje}$$

Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim

Diferencijalne jednačine prvog reda $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ nazivaju se diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim ako se f-je P i Q, kada se razlože na faktore, svaki zavisi samo od jedne promjenjive

$$f_1(x) f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dy = 0.$$

U ovom slučaju, djeljeći jednakost sa $f_2(y)\varphi_1(x)$ dobijamo razdvojene promjenjive

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy = 0.$$

Poslije razdvajanja varijabli, poslije čega će svaki član u jednakosti zavisiti samo od jedne varijable, opšte rješenje ćemo dobiti tako što ćemo integrirati svaki član posebno

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy = C.$$

Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina:

a) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0.$ b) $\frac{1}{\cos^2 x \cos y} dx = -ctg x \sin y \, dy.$

c) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x}) y' - y = 0.$ d) $2^{x+y} + 3^{x-2y} y' = 0.$

a)

$$(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0 \quad / : (x+1)^3 (y-2)^2$$

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0 \quad \Big/ \int$$

iz oblika

$$\frac{dy}{(y-2)^2} = \frac{dx}{(x+1)^3}$$

vidimo da je ovo diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\int \frac{\overbrace{dy}^{d(y-2)}}{(y-2)^2} - \int \frac{\overbrace{dx}^{= d(x+1)}}{(x+1)^3} = c$$

$$\int (y-2)^{-2} d(y-2) - \int (x+1)^{-3} d(x+1) = c$$

$$-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = c$$

opšte rješenje diferencijalne jednačine

b)

$$\frac{dx}{\cos^2 x \cos y} = -ctg x \sin y \, dy \quad / \cdot \frac{\cos y}{ctg x}$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x \, ctg x} = -\cos y \sin y \, dy$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{tg x}{\cos^2 x} dx + \sin y \cos y \, dy = 0 \quad \Big/ \int$$

$$\int tg x \, d(tg x) + \int \sin y \, d(\sin y) = C_1$$

$$\frac{1}{2}tg^2x+\frac{1}{2}\sin^2 y=\frac{1}{2}C$$

$$tg^2x+\sin^2y=C.$$ opće rješenje diferencijalne jednačine

c) $$(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y'-y=0$$

$$(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}\,y'=y$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{y}{\sqrt{y}+1}$$ ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{y}{\sqrt{y}+1}$$

$$(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{\sqrt{y}+1}{y}dy=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy-\frac{1}{\sqrt{x}}dx=0 \quad /\int$$

$$\int\left(y^{-1/2}+\frac{1}{y}\right)dy-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=C$$

$$2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C$$ opće rješenje diferencijalne jednačine

d) $$2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0$$

$$2^x\cdot 2^y+3^x\cdot 3^{-2y}\frac{dy}{dx}=0 \quad /\cdot\frac{dx}{2^y3^x}$$

primjetimo da je riječ o diferencijalnoj jednačini sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{2^x}{3^x}dx+\frac{3^{-2y}}{2^y}dy=0 \quad /\int$$

$$\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx+\int\left(\frac{1}{18}\right)^y dy=C$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}-\frac{\left(\frac{1}{18}\right)^y}{\ln 18}=C$$

opće rješenje diferencijalne jednačine

(#) Odrediti partikularno rješenje diferencijalne jednačine, koji zadovoljavaju inicijalni uslov:

a) $y\,dx + ctg\,x\,dy = 0$; $y(\frac{\pi}{3}) = -1$

b) $s = s' \cos^2 t \ln s$; $s(\pi) = 1$.

Rj.

a) $y dx + ctg x\, dy = 0 \quad / \cdot \frac{1}{y\, ctg x}$

$$\frac{dx}{ctg x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad / \int$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{dy}{y} = C_1$$

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C_2$$

$$\ln|y| = \ln C_2 |\cos x|$$

$$|y| = C_2 |\cos x|$$

$$y = \pm C_2 \cos x = C \cos x$$

$y = C \cos x$ je opšte rješenje diferencijalne jednačine

Da bi odredili partikularno rješenje trebamo odrediti konstantu C tako da je $y(\frac{\pi}{3}) = -1$. Ovo znači da je $y = -1$, $x = \frac{\pi}{3}$ u opštem rješenju diferencijalne jednačine.

$$-1 = C \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{3})}_{=\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$y = -2 \cos x$ je partikularno rješenje diferencijalne jednačine

b) $s = s' \cos^2 t \ln s$

$$s = \frac{ds}{dt} \cos^2 t \ln s \quad \Big/ \frac{dt}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\ln s}{s} ds \quad \Big/ \int$$

$$\int d(\operatorname{tg} t) = \int \ln s \, d(\ln s) + C$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{1}{2} \ln^2 s + C$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

Sad ako stavimo da je $t = \pi$, $s = 1$ imam

$$\underbrace{\operatorname{tg} \pi}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{2} \ln^2 1}_{=0} + C \quad \Rightarrow$$ $C = 0$ je partikularno rješenje diferencijalne jednačine

Zadaci za vježbu

Odrediti opšte rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina

1. $(y+xy)\,dx+(x-xy)\,dy=0$
2. $yy'+x=1$
3. $\sin\alpha\cos\beta\,d\alpha=\cos\alpha\sin\beta\,d\beta$
4. $1+(1+y')e^{y}=0$
5. $3e^{x}\sin y\,dx=(e^{x}-1)\dfrac{dy}{\cos y}$
6. * $x^2(2yy'-1)=1$

Naći partikularno rješenje sljedećih diferencijalnih jednačina, tako da zadovoljavaju dati inicijalni uslov

7. $y^2+x^2y'=0; \quad y(-1)=1$
8. $2(1+e^{x})yy'=e^{x}; \quad y(0)=0.$
9. $(1+x^2)y^3\,dx-(y^2-1)x^3\,dy=0; \quad y(1)=-1.$

Rješenja:

1. $x-y+\ln|xy|=C$ 2. $(x-1)^2+y^2=C^2$ 3. $\cos\beta=C\cos\alpha$

4. $(e^{y}+1)e^{x}=C$ 5. $\operatorname{tg}y=C(e^{x}-1)^3$ 6. $x(y^2+C)=x^2-1$

7. $x+y=0$ 8. $2e^{y^2}=e^{x}+1$ 9. $x^{-2}+y^{-2}=2\left(1+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$

Izabrani **Zadaci za vježbu** sa rješenjima

(iz lekcije Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim)

Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promjenjivim su oblika $y'=f(x)g(y)$.

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy'=y-xy\sin x$.

Rj. $xy'=y-xy\sin x$

$xy'=y(1-x\sin x) \quad /:x \ (x\neq 0)$

$y'=y\cdot\frac{1-x\sin x}{x}$ ovo je dif. jedn. sa razdv. promj.

$\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1-x\sin x}{x} \quad /\cdot\frac{dx}{y}$

$\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x}-\sin x\right)dx$

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx-\int\sin x\,dx$

$\ln|y|=\ln|x|+\cos x+\ln C$

$\ln|y|=\ln|x\cdot c|+\ln e^{\cos x}$

$y=Cxe^{\cos x}$ opšte rješenje dif. jedn.

ISPITNI ZADATAK

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$(xy^2+3x)dx+(2x^2y-5y)dy=0.$

Rj. $(2x^2y-5y)dy=-(xy^2+3x)dx$

$y(2x^2-5)dy=-x(y^2+3)dx$

$\frac{y}{y^2+3}dy=\frac{-x}{2x^2-5}dx$ ovo je dif. jedn. sa razdv. prom.

$\int\frac{y}{y^2+3}dy=-\int\frac{x}{2x^2-5}dx$

$\int\frac{y}{y^2+3}dy=\left|\begin{matrix}y^2=t\\2ydy=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+3}=\frac{1}{2}\ln|y^2+3|$

$\int\frac{x}{2x^2-5}dx=\left|\begin{matrix}2x^2=t\\4xdx=dt\\xdx=\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-5}=\frac{1}{4}\ln|2x^2-5|$

$\frac{1}{2}\ln|y^2+3|=-\frac{1}{4}\ln|2x^2-5|+\ln C_1 \quad /\cdot 4$

$\ln|y^2+3|^2=\ln|C\cdot(2x^2-5)^{-1}|$

$(y^2+3)^2=\frac{C}{2x^2-5}$

opšte rješenje dif. jedn.

3. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$3y'(x^2-1)-2xy=0$

Rj. $y^3=C(x^2-1)$ opšte rješ. dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y-xy'=a(1+x^2y')$, $a=const.$

Rj. $y-xy'=a(1+x^2y')$, $a=const.$

$$y-xy'=a+ax^2y'$$

$$ax^2y'+xy'=y-a$$

$$(ax^2+x)y'=y-a$$

$$y'=\frac{1}{ax^2+x}\cdot(y-a)$$

Ovo je diferenc. jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y-a}=\frac{dx}{ax^2+x}$$

$$\int\frac{dx}{x(ax+1)}=\int\frac{dy}{y-a}$$

$ax+1=t$

$a\,dx=dt$

$dx=\frac{1}{a}dt$

$$\int\frac{dx}{x(ax+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{ax+1}\right)dx$$

$$=\ln|x|-a\cdot\frac{1}{a}\ln|ax+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x}{ax+1}\right|+c$$

$$\ln\left|\frac{x}{ax+1}\right|=\ln|y-a|+\ln c$$

$$\frac{x}{ax+1}=c(y-a)$$

Rešenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x^2y+x^2)\,dx+(x^4y-y)\,dy=0$.

Rj: $(x^2y+x^2)\,dx+(x^4y-y)\,dy=0$

$$x^2(y+1)\,dx+(x^4-1)\,y\,dy=0$$

$$x^2(y+1)\,dx=-(x^4-1)\,y\,dy$$

$$\frac{y}{y+1}\,dy=-\frac{x^2}{x^4-1}\,dx$$

diferencijalni račun sa razdvojenim promjenjivim $\Big/\int$

$$\int\frac{y}{y+1}\,dy=-\int\frac{x^2}{x^4-1}\,dx$$

$$\int\frac{y\overset{+1-1}{}}{y+1}\,dy=\int dy-\int\frac{dy}{y+1}=y-\ln|y+1|+C$$

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x^2+1}\quad /(x^4-1)$$

$$x^2=A\underbrace{(x+1)(x^2+1)}_{x^3+x+x^2+1}+B\underbrace{(x-1)(x^2+1)}_{x^3+x-x^2-1}+C\underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2+x-x-1}$$

$$x^2=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+C(x^2-1)$$

$A+B=0$ (a) $\qquad A=-B$

$A-B+C=1$ (b) $\qquad$ (b): $-B-B+C=1 \Rightarrow -2B+C=1$

$A+B=0$ (c)

$A-B-C=0$ (d) $\qquad$ (d): $-B-B-C=0 \Rightarrow -2B-C=0$

$\Big\} + \Rightarrow -4B=1$, $B=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow A=\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

$$\int\frac{x^2}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}|x+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

$$y-\ln|y+1|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' = 2^{2x+y}$.

Rj. $y' = 2^{2x} \cdot 2^{y}$ diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$\frac{dy}{dx} = 2^{2x} \cdot 2^{y}$

$\frac{dy}{2^{y}} = 4^{x}\, dx$

$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$

$2^{-y} dy = 4^{x} dx \quad / \int$

$\ln 4 = \ln 2^{2} = 2 \ln 2$

$\int 2^{-y} dy = \int 4^{x} dx$

$\int 2^{-y} dy = \left| \begin{array}{l} -y = t \\ -dy = dt \\ dy = -dt \end{array} \right| = -\int 2^{t} dt = -\frac{2^{t}}{\ln 2} + C = -\frac{2^{-y}}{\ln 2} + C$

$-\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{4^{x}}{\ln 4} + C_1$

$-\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{4^{x}}{2 \ln 2} + C_1 \quad / \cdot \ln 2 \cdot 2$

$-2 \cdot 2^{-y} = 4^{x} + C$ opšte rješenje dif. jednačine

$2^{-y} = \frac{4^{x} + C}{-2}$ ili $4^{x} = C - 2 \cdot 2^{-y}$

$-y = \log_2 \frac{4^{x} + C}{-2}$ $x = \log_4 (C - 2^{1-y})$ ili opšte rješenje

$y = \log_2 \frac{-2}{4^{x} + C}$ opšte rješenje

Homogene jednačine prvog reda

Jednačine prvog reda $y' = f(x,y)$ nazivamo homogene, ako $f(x,y)$ možemo napisati kao f-ju jednih vezanih promjenjivih $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, t.j. jednačina oblika $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Homogena jednačina se svodi na jednačinu sa razdvojenim promjenjivim koju možemo riješiti zamjenom x-a (ili y-na) novom f-jom u po formuli $y = ux$ (ili $x = uy$).

Homogene diferencijalne jednačine

su oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux,\ y' = u'x + u$

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' + y = -x$.

Rj. $xy' + y = -x \quad /:x \ (x \neq 0)$

$y' + \frac{y}{x} = -1$

$y' = -1 - \frac{y}{x}$ ovo je hom. dif. jedn.

uvodimo smjenu $u = \frac{y}{x}$

$y = ux,\ y' = u'x + u$

$u'x + u = -1 - u$

$\frac{du}{dx}x = -1 - 2u \quad /\cdot \frac{dx}{(-1-2u)\cdot x}$

$\frac{du}{-1-2u} = \frac{dx}{x}$

$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x} \quad \Big/\int \qquad \left| \begin{array}{l} 2u = t \\ 2du = dt \\ du = \frac{1}{2}dt \end{array} \right|$

$\frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|x| + \ln|C_1| \quad /\cdot 2$

$\ln|2u+1| = 2\ln\left|\frac{C_1}{x}\right|$

$2u + 1 = \left(\frac{C_1}{x}\right)^2$

$2u = \frac{C}{x^2} - 1 \Rightarrow 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2} - 1 \Rightarrow 2y = \frac{C}{x} - x$ tj. $y = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{2}$ opšte rješenje diferenc. jedn.

2. Naći partikularno rješenje diferencijalne jednačine $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ tako da zadovoljava uslov $y(1) = e$.

Rj. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) \quad /:x$

$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ ovo je hom. dif. jedn.

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux,\ y' = u'x + u$

$u'x + u = u(1 + \ln u)$

$u'x = u\ln u,\quad u' = \frac{du}{dx}$

$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \quad \Big/\int$

$\int\frac{du}{u\ln u} = \left| \begin{array}{l} \ln u = t \\ \frac{du}{u} = dt \end{array} \right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\ln u$

$\ln\ln u = \ln x + \ln C$

$\ln u = xC \Rightarrow u = e^{Cx}$

$y = xe^{Cx}$ opšte rješenje dif. jedn.

$\left.\begin{array}{l} y(1) = e \\ y(1) = 1\cdot e^{C\cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow e^C = e \Rightarrow C = 1$

$y = xe^x$ partikularno rješenje dif. jedn.

3. Naći opšte rješenje dif. jednačine $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

Rj. $y = -x\ln\ln\frac{C}{x}$

(4) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0.$$

Rj.

$$y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0$$

$$y^3y' = -3xy^2 - 2x^3 \quad / : y^3$$

$$y' = \frac{-3xy^2 - 2x^3}{y^3} \quad \begin{matrix} : x^3 \\ : x^3 \end{matrix}$$

$$y' = \frac{-3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

ovo je homogena diferencijalna jednačina

uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u$

tj. $y = ux$

$y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{-3u^2 - 2}{u^3}$$

$$u'x = \frac{-3u^2 - 2}{u^3} - u$$

$$u'x = \frac{-3u^2 - 2 - u^4}{u^3}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-u^4 - 3u^2 - 2}{u^3}$$

$$\frac{u^3}{-u^4 - 3u^2 - 2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2}du = -\frac{dx}{x}$$

$u^4 + 3u^2 + 2 = 0$

$u^2 = t, \quad t^2 + 3t + 2 = 0$ $\qquad t_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$

$D = 9 - 8 = 1$ $\qquad t_1 = \frac{-4}{2} = -2$

$(u^2 + 2)(u^2 + 1) = 0$ $\qquad t_2 = \frac{-2}{2} = -1$

$$\frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2} = \frac{Au + B}{u^2 + 2} + \frac{Cu + D}{u^2 + 1} \quad /(u^2+2)(u^2+1)$$

$$u^3 = A(u^3 + u) + B(u^2 + 1) + C(u^3 + 2u) + D(u^2 + 2)$$

$$\begin{aligned} A + \quad C \quad &= 1 \\ B \quad + D &= 0 \\ A + 2C \quad &= 0 \\ B \quad + 2D &= 0 \end{aligned}$$

$B = D = 0$

$A + C = 1$

$A + 2C = 0 \quad / \cdot (-1)$

$A + C = 1$

$-A - 2C = 0$

$-C = 1$

$C = -1$

$\therefore A = 2$

$$\frac{u^3}{u^4+3u^2+2} = \frac{2u}{u^2+2} + \frac{-u}{u^2+1}$$

$$\frac{u^3}{u^4+3u^2+2}\, du = -\frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\ln|u^2+2| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| = -\ln|x| + \ln c$$

$$\ln \frac{|u^2+2|}{\sqrt{u^2+1}} = \ln \frac{c}{x}$$

$$\frac{u^2+2}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{c}{x}$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}} = \frac{c}{x}$$

rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$$

Rj:

$$(x^2+2xy)dy=(3y^2+3xy+x^2)dx \quad /:dx \quad /:(x^2+2xy)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2+3xy+x^2}{x^2+2xy} \quad \begin{matrix} :x^2 \\ :x^2 \end{matrix}$$

$$y'=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\frac{y}{x}+1}{2\frac{y}{x}+1}$$

ovo je homogena difer. jedn. uvodimo smjenu $u=\frac{y}{x}$

$$y=ux \quad /\frac{d}{dx}$$

$$y'=u'x+u$$

$$u'x+u=\frac{3u^2+3u+1}{2u+1}$$

$$u'x=\frac{3u^2+3u+1}{2u+1}-u$$

$$u'x=\frac{3u^2+3u+1-2u^2-u}{2u+1}$$

$$u'x=\frac{u^2+2u+1}{2u+1}$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{u^2+2u+1}{2u+1}$$

$$\frac{2u+1}{u^2+2u+1}du=\frac{dx}{x} \quad \ldots(*)$$

$$\int\frac{2u+1}{u^2+2u+1}du=\int\frac{2u+2-1}{u^2+2u+1}du=$$

$$=\int\frac{2u+2}{u^2+2u+1}du-\int\frac{du}{u^2+2u+1}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u^2+2u+1=t \\ (2u+2)du=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{du}{(u+1)^2}=\left|\begin{matrix} u+1=s \\ du=ds\end{matrix}\right|=$$

$$\ln|t|-\int\frac{ds}{s^2}=\ln|u^2+2u+1|-\frac{s^{-1}}{(-1)}+c=\ln(u+1)^2+\frac{1}{u+1}+c$$

$$(*) \Rightarrow \ln(u+1)^2+\frac{1}{u+1}=\ln|x|+c$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}+1\right)^2+\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=\ln|x|+c$$ rješenje diferencijalne jednačine

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(5y+7x)\,dy+(8y+10x)\,dx=0$$

Rj:

$$(5y+7x)\,dy+(8y+10x)\,dx=0$$

$$(5y+7x)\,dy=(-8y-10x)\,dx=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-8y-10x}{5y+7x}\quad \begin{matrix}/:x\\ /:x\end{matrix}$$

$$y'=\frac{-8\left(\frac{y}{x}\right)-10}{5\left(\frac{y}{x}\right)+7}$$

ovo je homogena diferencijalna jednačina, uvodimo smjenu $u=\frac{y}{x}$

$$y=u\cdot x\quad /\frac{d}{dx}$$

$$y'=u'x+u$$

$$u'x+u=\frac{-8u-10}{5u+7}$$

$$u'x=\frac{-8u-10}{5u+7}-u$$

$$u'x=\frac{-8u-10-u(5u+7)}{5u+7}$$

$$u'x=\frac{-8u-10-5u^2-7u}{5u+7}$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{\overbrace{-5u^2-15u-10}^{(-5)(u^2+3u+2)}}{5u+7}$$

$$\frac{du}{dx}x=(-5)\frac{(u+1)(u+2)}{5u+7}$$

$$\frac{(5u+7)\,du}{u^2+3u+2}=-5\frac{dx}{x}\quad \ldots(*)\quad \int$$

$$\frac{5u+7}{u^2+3u+2}=\frac{5u+7}{(u+1)(u+2)}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u+2}\quad /(u+1)(u+2)$$

$$5u+7=A(u+2)+B(u+1)$$

$$\begin{aligned}A+B&=5\\ -\quad 2A+B&=7\end{aligned}\qquad -A=-2\qquad A=2\qquad B=3$$

$$\int\frac{5u+7}{u^2+3u+2}du=2\int\frac{du}{u+1}+3\int\frac{du}{u+2}$$

$$(*)\Rightarrow\quad 2\ln|u+1|+3\ln|u+2|=-5\ln|x|+\ln|C|$$

$$\ln(u+1)^2(u+2)^3=\ln(x^{-5}C)$$

$$(u+1)^2(u+2)^3=\frac{C}{x^5}$$

$$\left(\frac{y}{x}+1\right)^2\left(\frac{y}{x}+2\right)^3=\frac{C}{x^5}\qquad \text{rješenje diferencijalne jednačine}$$

Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene

su oblika $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

ako je $a_1b_2-a_2b_1=0$ uvodimo smjenu $a_1x+b_1y=u$ i dobijamo dif. jedn. sa razdvojenim promjenjivim.

ako je $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ uvodimo smjenu $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ gdje α i β dobijamo iz sistema
$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$$
$$a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0.$$

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x-2y+1)y'=2x-y+1$.

Rj. $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$, $a_1b_2-a_2b_1\neq 0 \Rightarrow x=u+\alpha,\ y=v+\beta \Rightarrow y'=v'$

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha-\beta+1=0\\ \alpha-2\beta+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{3}\ ;\ \beta=\frac{1}{3} \qquad x=u-\frac{1}{3},\quad y=v+\frac{1}{3}$$

$$v'=\frac{2(u-\frac{1}{3})-(v+\frac{1}{3})+1}{(u-\frac{1}{3})-2(v+\frac{1}{3})+1}$$

$$v'=\frac{2u-v}{u-2v}\quad \begin{array}{l}/:u\\ /:u\end{array}$$

$$v'=\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$ ovo je hom. dif. jedn.

smjena $\frac{v}{u}=z$, $v=uz$
$v'=z'u+z$

$$z'u+z=\frac{2-z}{1-2z}$$

$$z'u=\frac{2(z^2-z+1)}{1-2z},\quad z'=\frac{dz}{du}$$

$$\frac{1-2z}{z^2-z+1}dz=2\frac{du}{u}\quad \Big/\int$$

$$-\ln(z^2-z+1)=2\ln u+\ln C_1$$

$$\ln\frac{1}{z^2-z+1}=\ln C_1u^2$$

$$1=C_1u^2(z^2-z+1)$$

$$1=C_1u^2\left(\frac{v^2}{u^2}-\frac{v}{u}+1\right)\quad /:C_1$$

$$C=v^2-uv+u^2$$

$$C=\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$$

opšte rješenje diferenc. jednač.

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu
$(2x+y+1)y'=4x+2y+3$.

Rj. $\ln Cx^{16}(8x+4y+5)=4(2x+y+1)$ opšte rješenje

3. Riješiti diferencijalnu jednačinu
$(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$

Rj. $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$ opšte rješenje

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x-y-2)\,dx+(2x-y-5)\,dy=0$$

Rj.

$$(2x-y-5)\,dy=-(x-y-2)\,dx \quad \Big/\cdot\frac{1}{dx}\cdot\frac{1}{2x-y-5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+y+2}{2x-y-5}$$

$$y'=\frac{-x+y+2}{2x-y-5}$$

diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

$$a_1b_2-a_2b_1=1-2=-1\neq 0$$

uvodimo smjenu $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$

$$\begin{aligned}-\alpha+\beta+2&=0\\+\;2\alpha-\beta-5&=0\\\hline \alpha-3&=0\\\alpha&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\alpha+\beta+2&=0\\-3+\beta+2&=0\\\beta&=1\end{aligned}$$

$x=u+3$, $y=v+1$, $y'=v'$ $\Rightarrow$ $u=x-3$, $v=y-1$

$$v'=\frac{-u-3+v+1+2}{2u+6-v-1-5}$$

$$v'=\frac{-u+v}{2u-v}\quad \begin{matrix}/:u\\/:u\end{matrix}$$

$$v'=\frac{-1+\frac{v}{u}}{2-\frac{v}{u}}$$ ovo je homogena diferenc. jednačina

uvodimo smjenu $z=\frac{v}{u}$

$$v=z\cdot u \quad /'_u$$

$$v'=z'\cdot u+z$$

$$z'\cdot u+z=\frac{-1+z}{2-z}$$

$$z'u=\frac{-1+z}{2-z}-z$$

$$z'u=\frac{-1+z-2z+z^2}{2-z}$$

$$z'u=\frac{z^2-z-1}{2-z}\;,\quad z'=\frac{dz}{du}$$

$$\frac{2-z}{z^2-z-1}\,dz=\frac{du}{u}\quad \Big/\int$$

$$2-z=(-1)(z-2)=\left(-\frac{1}{2}\right)(2z-4)=\left(-\frac{1}{2}\right)(2z-1-3)$$

$$\int\frac{2-z}{z^2-z-1}\,dz=-\frac{1}{2}\int\frac{2z-1}{z^2-z-1}\,dz+\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2-z-1}=$$

$$\overset{(*)}{=}-\frac{1}{2}\ln(z^2-z-1)+\frac{3\sqrt5}{10}\ln\left|\frac{2z-1-\sqrt5}{2z-1+\sqrt5}\right|+C$$

$$\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2-z-1}=\left|\begin{matrix}z^2-z-1=z^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=\\=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\left|\begin{matrix}z-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt5}{2}t\\dz=\frac{\sqrt5}{2}dt\\t=\frac{2z-1}{\sqrt5}\end{matrix}\right|=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{2}\cdot\frac{4}{5}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{3\sqrt5}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{3\sqrt5}{10}\ln\left|\frac{2z-1-\sqrt5}{2z-1+\sqrt5}\right| \quad ...(*)$$

$$\ln u=-\frac{1}{2}\ln(z^2-z-1)+\frac{3\sqrt5}{10}\ln\left|\frac{2z-1-\sqrt5}{2z-1+\sqrt5}\right|+\ln C_2 \quad /\cdot 10$$

$$u^{10}=\frac{C}{(z^2-z-1)^5}\left|\frac{2z-1-\sqrt5}{2z-1+\sqrt5}\right|^{3\sqrt5}$$ opšte rješenje difer. jedn.

$z=\frac{v}{u}$, $v=y-1$, $u=x-3$

Linearne diferencijalne jednačine i jednačina Bernulija

Jednačina oblika $y' + P(x)y = Q(x)$, gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ date funkcije po x, koja je linearna (prvog stepena) u odnosu na f-ju y i njezin izvod y', nazivamo linearna diferencijalna jednačina.

Pomoću zamjene f-je y sa proizvodom dvije pomoćne f-je $y = uv$, linearna jednačina se svodi na dvije jednačine sa razdvojenim promjenjivim u odnosu na svaku od pomoćnih f-ja.

Jednačina Bernulija $y' + P(x)y = y^n Q(x)$, koja se razlikuje od linearne jednačine u činjenici da je desna strana faktor nekog stepena f-je y, rješava se na potpuno isti način kao i linearna. Pomoću smjene $y = uv$ ona se također svodi na dvije jednačine sa razdvojenim promjenjivim.

Linearna diferencijalna jednačina

su oblika $y' + p(x)\cdot y = g(x)$. uvodimo smjenu $y = uv$.

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(1+x^2)y' = x(2y+1)$.

Rj. $(1+x^2)y' = 2xy + x$

$(1+x^2)y' - 2xy = x \quad /:(1+x^2)$

$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$ ovo je lin. dif. jedn.

$y = u\cdot v$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

uvretimo smjenu

$u'\cdot v + u\cdot v' - \frac{2x}{1+x^2}uv = \frac{x}{1+x^2}$

$u'\cdot v + u\cdot \underbrace{\left(v' - \frac{2x}{1+x^2}v\right)}_{\text{ovaj dio izjednačimo sa 0 da bi našli } v} = \frac{x}{1+x^2}$

a)

$v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0$, $v' = \frac{dv}{dx}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}v$

$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad //\int$

$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{x}{1+x^2}dx \quad \left|\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{matrix}\right|$

$\ln|v| = \ln|1+x^2|$

$v = 1+x^2$

b)

$u'v = \frac{x}{1+x^2}$

$u'(1+x^2) = \frac{x}{1+x^2}$, $u' = \frac{du}{dx}$

$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, $du = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \quad //\int$

$\int du = \int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx \quad \left|\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|$

$u = -\frac{1}{2(1+x^2)} + c$

$y = u\cdot v = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} + c\right](1+x^2)$

$y = c(1+x^2) - \frac{1}{2}$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ ako je $y(1) = -1$.

Rj. $y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + c)$ opšte rješenje diferenc. jedn.

$y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| - 3)$ partikularno rješenje diferenc. jedn.

3. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$y' + y\cos x = 0{,}5 \sin 2x$

Rj. $y = 1 - \sin x + ce^{-\sin x}$ opšte rješenje dif. jedn.

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}.$$

R: $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}$ ovo je linearna diferencijalna jednačina

uvodimo smjenu $y=uv$

$y=uv, \quad y'=u'v+uv'$

$$u'v+uv' - \frac{x}{1+x^2}uv = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{x}{1+x^2}v\right)}_{=0} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}$$

a)

$$v' - \frac{x}{1+x^2}v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{1+x^2}v \qquad /:v$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{x}{1+x^2}dx \qquad //\int$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx = \left|\begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + c = \ln|1+x^2|^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\ln|v| = \ln\sqrt{1+x^2}.$$

$$v = \sqrt{1+x^2}$$

b)

$$u'v = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}$$

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2-2x+2}$$

$$du = \frac{x}{x^2-2x+2}dx \qquad //\int$$

$$\int\frac{x^{-1+1}}{x^2-2x+2}dx = \int\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \int\frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$= \left|\begin{array}{ll} x^2-2x+2=t & x^2-2x+2= \\ (2x-2)dx=dt & x^2-2x+1+1= \\ (x-1)dx=\frac{1}{2}dt & =(x-1)^2+1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + c$$

$$u = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + c$$

$$y = uv = \left(\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1) + c\right)\sqrt{1+x^2} =$$

$$= c\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x-1)\right)$$

rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x^2+2x-2y)dx - dy = 0$.

Rj.

$$(x^2+2x-2y)\,dx - dy = 0 \quad /: dx$$

$$x^2+2x-2y - y' = 0$$

$$y' + 2y = x^2+2x$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina

Uvodimo smjenu $y = uv \quad / \frac{d}{dx}$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + 2uv = x^2+2x$$

$$u'v + \underbrace{u(v'+2v)}_{=0} = x^2+2x$$

a) $v' + 2v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\frac{dv}{v} = -2\,dx \quad / \int$$

$$\ln v = -2x$$

$$v = e^{-2x}$$

b) $u'v + u\cdot 0 = x^2+2x$

$$u'v = x^2+2x$$

$$u' e^{-2x} = x^2+2x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2+2x}{e^{-2x}}$$

$$du = \frac{x^2+2x}{e^{-2x}}\,dx$$

$$du = (x^2+2x)e^{2x}\,dx \quad \ldots(*)$$

$2x = t$
$2dx = dt$
$dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int (x^2+2x)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+2x & dv = e^{2x}dx \\ du = 2x+2 & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2+2x) - \int (x+1)e^{2x}dx$$

$$\int (x+1)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x+1 & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$\int (x^2+2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2+2x) - \frac{1}{2}e^{2x}(x+1) + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$(*) \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$y = uv = \left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right)e^{-2x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'\cos x - y\sin x = x^3 e^{x^2}$ uz početni uslov $y(0)=1$.

Rj. $y'\cos x - y\sin x = x^3 e^{x^2} \quad /:\cos x$

$$y' - y\,tg x = \frac{x^3 e^{x^2}}{\cos x}$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina

uvodimo smjenu

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - uv\,tg x = \frac{x^2 e^{x^2}}{\cos x}$$

$$u'v + \underbrace{u(v' - v\,tg x)}_{=0} = \frac{x^3 e^{x^2}}{\cos x}$$

$$\int tg x\,dx = \left| \begin{array}{l} tg x = t \\ x = arctg\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t^2}dt = \left| \begin{array}{l} 1+t^2 = s \\ 2t\,dt = ds \\ t\,dt = \frac{ds}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|s| = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+tg^2 x| = \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

$v' - v\,tg x = 0$

$$\frac{dv}{dx} = v\,tg x$$

$$\frac{dv}{v} = tg x\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int tg x\,dx$$

$$\ln v = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

$$v = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v = \frac{x^3 e^{x^2}}{\cos x}$$

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{x^3 e^{x^2}}{\cos x} \quad /\cdot\cos x$$

$$\frac{du}{dx} = x^3 e^{x^2}$$

$$du = x^3 e^{x^2} dx$$

$$I = \int x^3 e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = x e^{x^2} dx \\ du = 2x & v = \int x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\cdot 2\int x\, e^{x^2} = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$du = x^3 e^{x^2} dx \quad /\int$$

$$u = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + c_1$$

$$y = uv = \frac{e^{x^2}(x^2-1)+c}{2\cos x}$$

opće rješenje diferencijalne jednačine

$y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{e^0(0-1)+c}{2\cos 0} = \frac{-1+c}{2} = 1$$

$-1 + c = 2$

$c = 3$

$$y = \frac{e^{x^2}(x^2-1)+3}{2\cos x}$$

partikularno rješenje diferencijalne jednačine

Bernulijeva diferencijalna jednačina

su oblika $y' + p(x)y = g(x)y^n$, $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ i $n \neq 1$

uvodimo smjenu $y = uv$ — ove dif. jedn. rješavamo na isti način kao što smo rješavali linearne dif. jed.

① Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' - x^2\sqrt{y} = 4y$.

Rj. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \quad /: x$

$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$ ovo je Bern. dif. jedn.

smjena $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - v\frac{4}{x}\right)}_{=0} = x\sqrt{uv}$$

(da bi smo našli v)

a) $v' - v\frac{4}{x} = 0 \Rightarrow v' = v\frac{4}{x}$

$v' = \frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx \quad //\int$

$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{4}{x}dx \Rightarrow \ln|v| = 4\ln|x|$

$v = x^4$

b) $u'v = x\sqrt{uv}$

$u'x^4 = x\sqrt{ux^4}$, $x^4u' = x^3\sqrt{u}$

$\frac{du}{dx} = x^{-1}\sqrt{u}$, $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x} \quad //\int$

$\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow 2\sqrt{u} = \ln x + c$

$\sqrt{u} = \frac{\ln x + c}{2}$

$u = \frac{(\ln x + c)^2}{4}$

$y = uv = \frac{(\ln x + c)^2}{4} \cdot x^4$

$y = \frac{x^4}{4}(\ln x + c)^2$ opšte rješenje difer. jedn.

②ᵛ Naći partikularno rješenje diferencijalne jednačine $y' = xy^3 - y$ koje prolazi kroz tačku $A(0,1)$.

Rj. $y^{-2} = e^{2x}\left[e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + c\right]$ opšte rješenje dif. jedn.

$y^{-2} = \frac{1}{2}e^{2x} + x + \frac{1}{2}$ partikul. rješ. dif. jed.

③ᵛ Riješiti diferencijalnu jednačinu

$(1 - x^2)y' = xy + xy^2$

Rj. $y = \frac{c}{\sqrt{1 - x^2}} - 1$

Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y' + \frac{y}{4x} + y^3 e^{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{ako je} \quad y(1) = 1.$$

Rj.

$$y' + \frac{1}{4x} y = -e^{\sqrt{x}} y^3$$ ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina.

uvodimo smjenu $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{4x} uv = -e^{\sqrt{x}} u^3 v^3$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{4x} v\right)}_{=0} = -e^{\sqrt{x}} u^3 v^3$$

a) $v' + \frac{1}{4x} v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{4x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dx}{4x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\ln v = -\frac{1}{4} \ln|x|$$

$$\ln v = \ln|x|^{-\frac{1}{4}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

b) $u'v = -e^{\sqrt{x}} u^3 v^3$

$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = -e^{\sqrt{x}} u^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad / \cdot \sqrt[4]{x}$$

$$\frac{du}{dx} = -e^{\sqrt{x}} \frac{u^3}{\sqrt[4]{x^2}}$$

$$\frac{du}{u^3} = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^2}} dx$$

$$\frac{du}{u^3} = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad / \int$$

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} = -2e^{\sqrt{x}} + c_1 \quad / \cdot (-2)$$

$$\frac{1}{u^2} = 4e^{\sqrt{x}} + c.$$

$$u^2 = \frac{1}{4e^{\sqrt{x}} + c} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{4e^{\sqrt{x}} + c}}$$

$$y = uv = \frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{4e^{\sqrt{x}} + c}}$$ opšte rješenje diferenc. jedn.

$$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4e + c}} = 1$$

$$\sqrt{4e + c} = 1$$

$$4e + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 4e$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{4e^{\sqrt{x}} + 1 - 4e}}$$ partikularno rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$,

Rj: $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x \, y^4$ ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina, uvodimo smjenu $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = u^4 v^4 \cos x$$

$$u'v + u\underbrace{(v' - v \operatorname{tg} x)}_{=0} = u^4 v^4 \cos x$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t^2} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1+t^2 = s \\ 2t\,dt = ds \\ t\,dt = \frac{ds}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \ln|s| + C = \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1}{\cos^2 x}\right| + C = \ln \frac{1}{\cos x} + C$$

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0$$

$$v' = v \operatorname{tg} x$$

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x$$

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x \, dx \quad / \int$$

$$\ln v = \ln \frac{1}{\cos x}$$

$$v = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v = u^4 v^4 \cos x \quad /:v$$

$$u' = u^4 v^3 \cos x$$

$$u' = u^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{u'}{u^4} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{u^4} = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int u^{-4} du = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\frac{u^{-3}}{-3} = \operatorname{tg} x + C_1$$

$$\frac{1}{u^3} = -3 \operatorname{tg} x + C.$$

$$\frac{1}{v} = \cos x$$

$$\frac{1}{u^3} = -3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + C$$

$$\frac{1}{v^3} = \cos^3 x$$

$$\frac{1}{u^3} = -3 \frac{\sin x}{\cos x} + C$$

$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{u^3 v^3} = -3 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^3 x + C \cdot \cos^3 x$$

$$y^{-3} = -3 \sin x \cos^2 x + C \cos^3 x$$

rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.

Rj.

$$y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$$

Bernulijeva diferencijalna jednačina je oblika $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n$, $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2}$$

$$x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}yx^{-2} + \frac{1}{3}x^{-2}$$

$$x' - \frac{1}{3}x = \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right)x^{-2}$$

ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina

Uvodimo smjenu

$$x = uv, \quad x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{3}uv = \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right)(uv)^{-2}$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{3}v\right) = \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\right)u^{-2}v^{-2}$$

a) $v' - \frac{1}{3}v = 0$

$$v' = \frac{1}{3}v$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{3}v$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}dy$$

$$\ln v = \frac{1}{3}y$$

$$v = e^{\frac{1}{3}y}$$

b) $v = e^{\frac{1}{3}y} = e^{\frac{y}{3}}$

$$u'e^{\frac{y}{3}} = \frac{y+1}{3}u^{-2}e^{-\frac{2y}{3}} \quad / e^{-\frac{y}{3}} \cdot u^2$$

$$u^2u' = \frac{y+1}{3}e^{-y}$$

$$u^2\frac{du}{dy} = \frac{1}{3}ye^{-y} + \frac{1}{3}e^{-y}$$

$$u^2du = \frac{1}{3}ye^{-y}dy + \frac{1}{3}e^{-y}dy \quad \ldots(1)$$

$$\int e^{-y}dy = \left|\begin{matrix} -y = t \\ dy = -dt \end{matrix}\right| = \int e^t(-dt) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{-y} + C$$

Kako je $\int ye^{-y}dy = \left|\begin{matrix} u = y & dv = e^{-y}dy \\ du = dy & v = -e^{-y} \end{matrix}\right| = -ye^{-y} + \int e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C$

To je kad itračino integral od (1):

$$\frac{1}{3}u^3 = -\frac{1}{3}ye^{-y} - \frac{1}{3}e^{-y} + C_1 - \frac{1}{3}e^{-y} \quad /\cdot 3$$

$$u^3 = -ye^{-y} - 2e^{-y} + C$$

$$u = \sqrt[3]{-ye^{-y} - 2e^{-y} + C}$$

$$x = uv$$

$$x = e^{\frac{y}{3}}\sqrt[3]{-ye^{-y} - 2e^{-y} + C}$$

opšte rješenje diferencijalne jednačine

$$x^3 = e^y(-ye^{-y} - 2e^{-y} + C)$$

$$x^3 = -y - 2 + Ce^y$$

Lagranžova diferencijalna jednačina

su oblika $y = x f(y') + g(y')$ uvodimo smjene $y'=p$, $x=uv$

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

Rj. $y = x\cdot(-y') + 4\sqrt{y'}$ ovo je Lagr. dif. jedn.

uvodimo smjenu $y'=p$

$y = -xp + 4\sqrt{p} \quad /\frac{d}{dx}$

$y' = -p - xp' + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{p}}\cdot p'$, $y'=p$

$2p = p'\left(-x + \frac{2}{\sqrt{p}}\right)$, $p' = \frac{dp}{dx}$

$\frac{1}{p'} = \frac{dx}{dp} = x'$ $\quad \frac{1}{p'} = \frac{-x + \frac{2}{\sqrt{p}}}{2p}$

$x' = -\frac{x}{2p} + \frac{1}{p\sqrt{p}}$

$x' + \frac{x}{2p} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$ ovo je linear. dif. jedn.

uvodimo smjenu $x=uv$, $x'=u'v+uv'$

$u'v + uv' + \frac{uv}{2p} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$

$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{2p}\right)}_{=0} = \frac{1}{p\sqrt{p}}$

a) $v' + \frac{v}{2p} = 0$, $\quad \frac{dv}{dp} = -\frac{v}{2p}$

$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\frac{dp}{p} \quad //\int$

$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|p|$

$v = p^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$

b) $u'\cdot\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p\sqrt{p}} \quad /\cdot\sqrt{p} \Rightarrow u' = \frac{1}{p}$

$u = \ln|p| + c$

$x = u\cdot v = \frac{\ln|p| + c}{\sqrt{p}}$ $\quad (*)$

$y = -xp + 4\sqrt{p} = -p\,\frac{c + \ln|p|}{\sqrt{p}} + 4\sqrt{p}$

$y = \sqrt{p}\,(4 - c - \ln|p|)$ $\quad (**)$

$(*)$ i $(**)$ je rješenje dif. jedn. u parametarskom obliku

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'(2x-y) = y$.

Rj. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2} \\ y = 2xp - p^2 \end{array}\right\}$ opšte rješ. dif. jedn. u parametarskom obliku

3. Naći rješenje diferencijalne jednačine $y = xy' - 2 - y'$ koje prolazi kroz tačku $A(2,5)$.

Rj. $y = xc - 2 - c$ opšte rješenje $\qquad y = 7x - 9$ partikularno rješenje

Riješiti diferencijalnu jednačinu $2y + y'(2x + y') = 0$.

Rj.

$y = -xy' - \frac{1}{2}(y')^2$ ovo je Lagranžova diferenc. jedn. $(y = x f(y') + g(y'))$ uvodimo smjene $y' = p$, $x = uv$

$y' = p$

$$y = -xp - \frac{1}{2}p^2 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$y' = -p - xp' - \frac{1}{2}\cdot 2pp'$$

$$p = -p - xp' - pp'$$

$$2p = (-x - p)p' \quad /:p'$$

$$\frac{2p}{p'} = -x - p, \quad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{dx}{dp} = x'$$

$$x' = -\frac{1}{2p}x - \frac{1}{2}$$

$$x' + \frac{1}{2p}x = -\frac{1}{2}$$ ovo je linearna dif. jedn. $(y' + f(x)y = g(x))$

uvodimo smjenu

$$x = uv, \quad x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{2p}uv = -\frac{1}{2}$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{1}{2p}v\right)}_{=0} = -\frac{1}{2}$$

$$v' + \frac{1}{2p}v = 0$$

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{1}{2p}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{dp}{p} \quad \Big/\int$$

$$\ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|p|$$

$$v = p^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$u'v = -\frac{1}{2}$$

$$u'\cdot\frac{1}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{du}{dp} = -\frac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$du = -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}dp \quad \Big/\int$$

$$u = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$u = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{p^3} + c$$

$$u = -\frac{1}{3}p\sqrt{p} + c$$

$$x = uv = \left(-\frac{1}{3}p\sqrt{p} + c\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$x = -\frac{p}{3} + \frac{c}{\sqrt{p}}$$

$$y = -xp - \frac{1}{2}p^2$$

$$y = \left(\frac{p}{3} - \frac{c}{\sqrt{p}}\right)p - \frac{1}{2}p^2$$

$$y = -\frac{1}{6}p^2 - \frac{p}{\sqrt{p}}c$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{p}{3} + \frac{c}{\sqrt{p}} \\ y &= -\frac{p^2}{6} - \frac{p}{\sqrt{p}}c \end{aligned}\right\}$$ opće rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y' + \frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$.

Rj.

$$y' + \frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \quad /\cdot x$$

$$y = xy' + \frac{x}{y'} \quad \text{uvodimo smjenu } y' = p$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= xy' + \frac{x}{y'} \\ y &= x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) \\ &\text{ovo je Lagranžova diferencijalna jednačina} \end{aligned}}$$

$$y = xp + \frac{x}{p} \quad /\frac{d}{dx}$$

$$y' = p + xp' + \frac{p - xp'}{p^2} \quad (\text{kako je } y' = p \text{ imamo})$$

$$p = p + xp' + \frac{1}{p^2}(p - xp')$$

$$xp' + \frac{1}{p} - \frac{xp'}{p^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{x}{p^2}\right)p' = -\frac{1}{p} \quad /\cdot p$$

$$\left(px - \frac{x}{p}\right)p' = -1 \quad /\cdot \frac{1}{p'}$$

$$-\frac{1}{p'} = px - \frac{1}{p}x$$

$$-\frac{1}{p'} = \left(p - \frac{1}{p}\right)x$$

znamo da je $\frac{1}{p'} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}} = \frac{dx}{dp} = x'$

pa imamo

$$-x' = \left(p - \frac{1}{p}\right)x \quad /\cdot(-1)$$

$$x' = \left(\frac{1}{p} - p\right)x$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$x' = \left(\frac{1}{p} - p\right)x$$

$$\frac{dx}{dp} = \left(\frac{1}{p} - p\right)x$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{p} - p\right)dp \quad \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{p} - p\right)dp.$$

$$\ln|x| = \ln|p| - \frac{p^2}{2} + C_1$$

$$\ln|x| = \ln|p| + \ln e^{-\frac{p^2}{2}} + \ln C$$

$$x = pCe^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$y = xp + \frac{x}{p} = Cpe^{-\frac{p^2}{2}} \cdot p + \frac{pCe^{-\frac{p^2}{2}}}{p}$$

$$y = Cp^2e^{-\frac{p^2}{2}} + C\cdot e^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$y = Ce^{-\frac{p^2}{2}}(p^2+1)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= pCe^{-\frac{p^2}{2}} \\ y &= Ce^{-\frac{p^2}{2}}(p^2+1) \end{aligned}\right\} \text{opšte rješenje}$$

Clairautova diferencijalna jednačina

je oblika $y = xy' + f(y')$

ove diferencijalne jednačine rješavamo na isti način kao što smo rješavali Lagranžovu dif. jedn.

uvodimo smjenu $y' = p$, $x = uv$

$dy = p\,dx$

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' + \sin y' - y = 0$

Rj. $y = xy' + \sin y'$

$$y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx$$

$$y = xp + \sin p \quad / d$$

$$dy = p\,dx + x\,dp + \cos p\,dp$$

$$\underline{\underline{p\,dx}} = \underline{\underline{p\,dx}} + x\,dp + \cos p\,dp$$

$$x\,dp + \cos p\,dp = 0$$

$$dp(x + \cos p) = 0$$

$$dp = 0 \Rightarrow p = c$$

$y = cx + \sin c$ opšte rješenje dif. jedn.

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y - xy' - \frac{y'^2}{2} = 0$.

Rj. $y = cx + \frac{c^2}{2}$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

Riješiti diferencijalnu jednačinu $2y-2xy'=a(\sqrt{1+(y')^2}-y')$.

Rj. Lagranžova diferencijalna jednačina je oblika $y=xf(y')+g(y')$

$$2y-2xy'=a(\sqrt{1+(y')^2}-y')$$

$$2y=2xy'+a(\sqrt{1+(y')^2}-y') \quad /:2$$

$$y=xy'+\frac{a}{2}(\sqrt{1+(y')^2}-y')$$

Ovo je Klerova diferencijalna jednačina

Uvodimo smjenu $y'=p$

$$y=xp+\frac{a}{2}(\sqrt{1+p^2}-p) \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$y'=p+xp'+\frac{a}{2}\left(\frac{\cancel{2}pp'}{\cancel{2}\sqrt{1+p^2}}-p'\right)$$

$$y'=p$$

$$p=p+xp'+\frac{a}{2}p'\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}-1\right)$$

$$-xp'=\frac{a}{2}p'\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}-1\right)$$

$$\left[x+\frac{a}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}-1\right)\right]p'=0$$

a) Ako je $p'=0$ imamo da je $p=c$

tj. $y'=c$ pa iz $y=xy'+\frac{a}{2}(\sqrt{1+(y')^2}-y')$

$$\Rightarrow \quad y=xc+\frac{a}{2}(\sqrt{1+c^2}-c)$$

$$y=xC_1+\frac{a}{2}C_2$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

b) Ako je

$$x+\frac{a}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}-1\right)=0$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}-1=-\frac{2}{a}x$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=1-\frac{2x}{a}$$

$$p^2=\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2(1+p^2)$$

$$p^2-\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2p^2=\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2$$

$$p^2=\frac{\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2}{1-\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2}$$

$$p=\frac{1-\frac{2x}{a}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2}}$$

$$y=xy'+\frac{a}{2}\left(\sqrt{1+(y')^2}-y'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{x-\frac{2}{a}x^2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}}+\frac{a}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}{1-\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2}}-\frac{1-\frac{2x}{a}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2}}\right)$$

Kako se ovo rješenje ne može dobiti iz opšteg rješenja ovo je singularno rješenje

zadnji izraz se može pojednostaviti

$$Y = \frac{x - \frac{2}{a}x^2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}} + \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{1 - \cancel{\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2} + \cancel{\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}}{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}} - \frac{1-\frac{2}{a}x}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}}\right)$$

$$Y = \frac{x - \frac{2}{a}x^2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}} + \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}} - \frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}}.$$

$$Y = \frac{2x - \frac{2}{a}x^2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{2}{a}x\right)^2}}$$

singularno rjesenje dif. jedn.

Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$

2. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int \frac{u'}{u}\,dx =$
$= \ln|u| + C.$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;\ \int e^u\,du =$
$= e^u + C.$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

6. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C.$

9. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} =$
$= \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + C.$